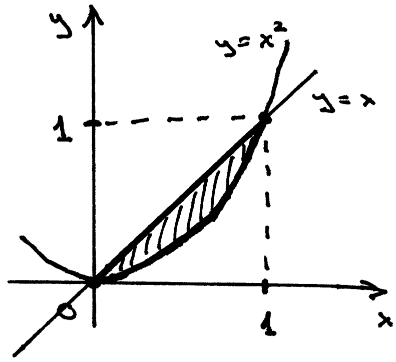
Contrôle continue 10/03/2008

Exercice 1 $\quad I = \iint_D (x+y)\, dS$



D est délimité par $y=x$, $y=x^2$.

$y = x = x^2 \Rightarrow x = 0, 1$ (2 points d'intersection)

Alors I s'écrit comme une intégrale itérée

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy\, (x+y) =$$

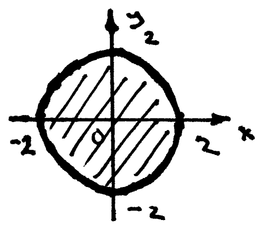
$$= \int_0^1 dx \left(xy + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=x} = \int_0^1 dx \left(x^2 - x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} \right) =$$

$$= \int_0^1 dx \left(\frac{3}{2}x^2 - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\,\frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{20}.$$

Exercice 2 $\quad Q = \iint_D \sigma(x,y)\, dx\, dy =$

$$= \iint_D (x+y+x^2+y^2)\, dx\, dy$$



Coordonnées polaires:

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $dx\,dy \to r\,dr\,d\varphi$

$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 4\} \longrightarrow D' = \{(r,\varphi) \mid r \in [0,2],\ \varphi \in [0,2\pi]\}$

et alors

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (\underbrace{r\cos\varphi}_{x} + \underbrace{r\sin\varphi}_{y} + \underbrace{r^2}_{x^2+y^2})\, r\, dr =$$

$$= \int_0^2 r^2 dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi}_{=0} + \int_0^2 r^2 dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi}_{=0} + \int_0^2 r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{r^4}{4}\Bigg|_0^2 = 2\pi \cdot \frac{16}{4} = 8\pi.$$

Exercice 3 $\quad z = 2+3x+4y$, $\quad R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 5,\ 1 \le y \le 4\}$

Paramétrisation de la surface:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 2+3u+4v \\ u \in [0,5],\ v \in [1,4] \end{cases} \Longrightarrow \vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 2+3u+4v \end{pmatrix},\ \vec{r}'_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{r}'_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}\,'_u \wedge \vec{r}\,'_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{r}\,'_u \wedge \vec{r}\,'_v| = \sqrt{3^2+4^2+1} = \sqrt{26}$$

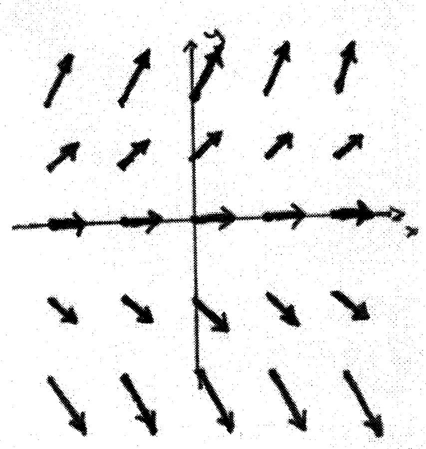
Donc l'aire de cette surface est :

$$S = \int_0^5 du \int_1^4 dv \cdot \sqrt{26} = 5 \cdot 3 \cdot \sqrt{26} = 15\sqrt{26}$$

Exercice 4

$f(x,y) = x + 2y^2$

$$\vec{E} = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y = 1 \cdot \vec{e}_x + 4y\,\vec{e}_y$$



- la composante x du gradient est constante
- $|E_y|$ augmente lorsque $|y|$ augmente
- E_y est positive/négative lorsque y est positif/négatif.
- sur l'axe x $(y=0)$: $\vec{E} = \vec{e}_x$
  sur l'axe y $(x=0)$: $\vec{E} = \vec{e}_x + 4y\,\vec{e}_y$
- points avec même $y \Rightarrow$ même $\vec{E}$

Exercice 5

$$I = \int_C z\,dx + x\,dy + y\,dz$$

a). C_1 = segment qui relie $(1,0,1)$ à $(2,3,1)$.

Paramétrisation de C_1 :

$$\begin{cases} x = 1\cdot(1-t) + 2\cdot t = t+1 \\ y = 0\cdot(1-t) + 3\cdot t = 3t \\ z = 1\cdot(1-t) + 1\cdot t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} dx = dt \\ dy = 3\,dt \\ dz = 0 \end{matrix}$$

$t \in [0,1]$

et donc

$$I_1 = \int_{C_1} z\,dx + x\,dy + y\,dz = \int_0^1 1\cdot dt + (t+1)\cdot 3\,dt = \int_0^1 (3t+4)\,dt =$$

$$= \left(3\frac{t^2}{2} + 4t\right)_{t=0}^{t=1} = \frac{3}{2} + 4 = \frac{11}{2}.$$

b). C_2 = courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} dx = dt \\ dy = 2t\,dt \\ dz = dt \end{matrix} \Rightarrow$$

$t \in [0,1]$

$$I_2 = \int_{C_2} z\,dx + x\,dy + y\,dz =$$
$$= \int_0^1 (t+1)\,dt + t\cdot 2t\,dt + t^2\,dt =$$
$$= \int_0^1 (3t^2+t+1)\,dt = \left(t^3 + \frac{t^2}{2} + t\right)\Big|_0^1 =$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}.$$

Exercice 6

Voir l'Exercice 1.4 du TD 6.